

TEMA 2

Fundamentos y aplicaciones de la Teoría de Grafos. Diagramas de Árbol.

profe de
Mates

Índice general

1.	Introducción	4
2.	Grafos y Digrafos	5
3.	Grafos Eulerianos	8
4.	Grafos Hamiltonianos	13
5.	Grafos Planos. Coloración de Grafos	15
6.	Árboles: Caracterización y Aplicaciones	17
7.	Conclusión	21
8.	Bibliografía	22

1 Introducción

La Teoría de Grafos tuvo su origen en 1736 gracias a Leonhard Euler, quien dio respuesta al famoso problema de los puentes de Königsberg, marcando así el nacimiento de esta disciplina matemática. En sus inicios, los grafos se utilizaron principalmente para resolver problemas recreativos, pero su desarrollo llevó rápidamente a aplicaciones prácticas en diversas áreas como la Química (modelos moleculares), la Biología (estudio de ecosistemas), la Economía (análisis de redes comerciales y financieras) y la Informática (optimización de redes). Los diagramas de árbol, una estructura relacionada con los grafos, han sido especialmente útiles en campos como la Estadística y el Análisis de Datos, facilitando la resolución de problemas de probabilidad y clasificación. Actualmente, tanto los grafos como los diagramas de árbol forman parte esencial de investigaciones en campos como la inteligencia artificial, la teoría de redes y los sistemas complejos.

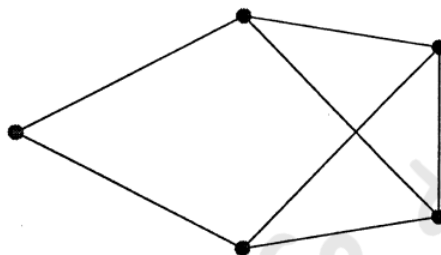
En el currículo de Educación Secundaria y Bachillerato, los diagramas de árbol y la Teoría de Grafos se integran en varias etapas, con énfasis en la resolución de problemas prácticos. En 3.º y 4.º de ESO, los diagramas de árbol se utilizan para resolver problemas de probabilidad y combinatoria, ofreciendo una herramienta visual que facilita la comprensión de experimentos aleatorios y del cálculo de probabilidades en contextos reales, como juegos de azar o decisiones basadas en datos. Por otro lado, en el Bachillerato de Ciencias Sociales, estos diagramas cobran especial relevancia en las asignaturas de Matemáticas Aplicadas, donde permiten analizar problemas de probabilidad compuesta, particiones y distribuciones de datos, conceptos fundamentales en áreas como la Estadística Descriptiva y la Investigación de Mercados.

La importancia de estas herramientas radica en su capacidad para desarrollar competencias clave como la modelización matemática, la resolución de problemas complejos y la interpretación de datos en situaciones reales, pilares del aprendizaje en la Educación Secundaria. Además, conectan la teoría matemática con aplicaciones prácticas en campos como la Economía, la Sociología y la Gestión Empresarial, dotando al alumnado de herramientas útiles para abordar los retos de un mundo cada vez más orientado al análisis de datos y la toma de decisiones fundamentadas.

2 Grafos y Digrafos

De un modo “informal”, podríamos comenzar definiendo un grafo del siguiente modo:

- (a) Un grafo es una colección de vértices y de aristas que unen dichos vértices.



- (b) Un grafo es también una notación que nos permite representar relaciones binarias, es decir, pares de objetos de un conjunto.

Ejemplo 1 (Problemas de asignación de tareas)

Tenemos un conjunto de trabajadores y otro de tareas y la información de para que tarea está preparado cada trabajador. Buscamos una asignación de tareas de forma que consigamos ocupar el mayor número de trabajadores posibles.

Ejemplo 2 (Construcción de redes)

Tenemos una serie de ciudades que queremos conectar mediante un oleoducto. Un estudio de ingeniería previo nos permite conocer el precio de cada conexión. Se trata de conectar todas las ciudades con el menor coste posible.

De un modo formal, definimos un grafo del siguiente modo:

Definición 1. *Un grafo es un par ordenado $G = (V, A)$, donde V es un conjunto de puntos llamados vértices y A es un conjunto de aristas, formado por pares no ordenados de elementos de V . Una arista del grafo G será por tanto un subconjunto $\{a, b\}$, con $a, b \in V$. Diremos entonces que los vértices a y b son adyacentes o vecinos. Un grafo en el que hay varias aristas entre dos mismos vértices, se dirá que es un multigrafo o grafo con lazos.*

2. GRAFOS Y DIGRAFOS

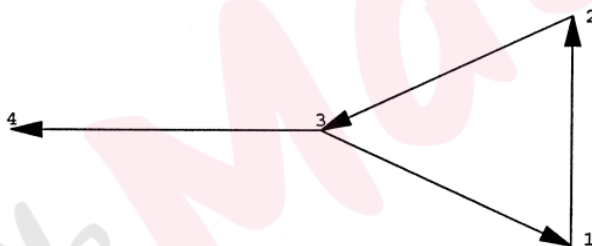
Así, en el ejemplo 1 (asignación de tareas), los vértices están formados por los nombres de los trabajadores y las tareas a realizar. Dibujaremos una arista entre un vértice que represente a un trabajador y otro que represente a una tarea si el trabajador está capacitado para realizar dicha tarea. En el ejemplo 2 (construcción de redes) las ciudades representan los vértices y las conexiones las aristas. En este caso el objetivo será unir todos los vértices con el menor número posible de aristas.

Definición 2. Un grafo $H = (V', A')$ es un subgrafo de $G = (V, A)$ si $V' \subseteq V$ y $A' \subseteq A$, es decir, si está formado por vértices y aristas de G .

Definición 3. Un digrafo o grafo dirigido es un grafo donde a cada arista se le asigna un orden en sus extremos (el orden lo indicamos mediante una flecha).

Ejemplo 3

Consideremos el grafo dirigido G , donde $V(G) = 1, 2, 3, 4$ y $A(G) = \{(1, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 4)\}$. Su representación sería la siguiente



La diferencia formal consiste en que los pares de vértices que definen las aristas de un digrafo son pares ordenados.

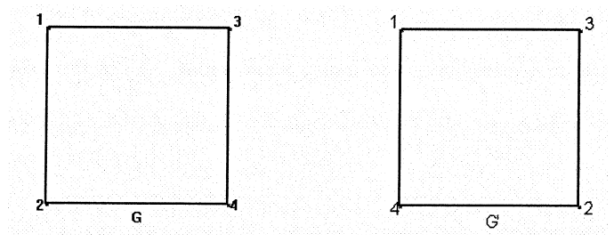
Definición 4. Decimos que dos grafos $G = (V, A)$ y $G' = (V', A')$ son isomorfos si existe una biyección $\varphi : V \rightarrow V'$ tal que

$$\{v, w\} \in A \iff \{\varphi(v), \varphi(w)\} \in A'.$$

Ejemplo 4

Consideremos los grafos G y G' de la siguiente figura, donde:

$$V(G) = V(G') = \{1, 2, 3, 4\} :$$



Es inmediato comprobar que la aplicación $\varphi : V(G) \rightarrow V(G')$ definida por $\varphi(1) = 1$, $\varphi(2) = 4$, $\varphi(3) = 3$ y $\varphi(4) = 2$ es un isomorfismo entre ambos grafos.

El hecho de que dos grafos sean isomorfos nos dice que, pese a que no son iguales, ambos contienen la misma “información”, excepto por el hecho de que tienen vértices con nombres cambiados. Observemos también que para que dos grafos puedan ser isomorfos han de tener el mismo número de vértices y de aristas.

Definición 5. Sea G un grafo y v un vértice de G . Se llama grado de v en G al número de aristas de G que tienen al vértice v por extremo. Denotaremos a dicho grado mediante $gr_G(v)$.

Es inmediato demostrar que si G y G' son dos grafos y φ es un isomorfismo entre ambos, entonces, para cada $v \in V(G)$, se tiene que $gr_G(v) = gr_{G'}(\varphi(v))$.

Teorema 1. Sea $G = (V, A)$ un grafo. La suma de los grados de sus vértices es el doble de número de aristas:

$$\sum_{v \in V} gr_G(v) = 2|A|.$$

Además, todo grafo contiene un número par (o cero) de vértices de grado impar.

Demostración

La demostración de la igualdad es evidente ya que, como cada arista tiene dos extremos, al realizar la suma de todos los grados de los vértices, cada arista se contará dos veces. Por tanto, la suma de todos los grados será exactamente el doble del número de aristas.

Supongamos por otro lado que v_1, v_2, \dots, v_t son los vértices de grado par, y que $v_{t+1}, v_{t+2}, \dots, v_p$ son los de grado impar. Se tiene que

$$\sum_{i=1}^t gr_G(v_i) + \sum_{i=t+1}^p gr_G(v_i) = 2|A| \Rightarrow \sum_{i=t+1}^p gr_G(v_i) = 2|A| - \sum_{i=1}^t gr_G(v_i),$$

que es un número par.

3. GRAFOS EULERIANOS

Así, si el número de vértices de grado impar fuese impar, $\sum_{i=1}^p gr_G(v_i)$ sería un número impar, lo cual nos llevaría a una contradicción. Por tanto, dicho número deberá ser par o cero.

□

Definición 6. *Un grafo se dice que es regular si todos sus vértices tienen el mismo grado. Si dicho grado es k entonces el grafo se llama k -regular.*

Definición 7. *Un grafo en el que cada par de vértices son los extremos de una arista se dice que es un grafo completo.*

Observemos que dos grafos completos con el mismo número de vértices son isomorfos.

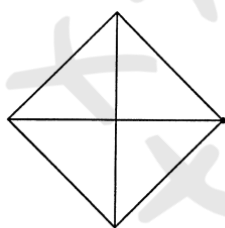
Efectivamente, sean $G = (V, A)$ y $G' = (V', A')$ dos grafos completos con r vértices: $V = \{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ y $V' = \{v'_1, v'_2, \dots, v'_r\}$. Sea $\varphi : V \rightarrow V'$ la aplicación definida por $\varphi(v_i) = v'_i$, para cada $i = 1, 2, \dots, r$.

Por ser G completo, cualquier par de vértices v_i y v_j son adyacentes, y por ser G' completo, $\varphi(v_i) = v'_i$ y $\varphi(v_j) = v'_j$ también lo son. Por tanto, G y G' serán isomorfos.

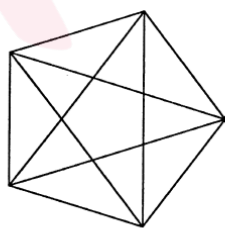
Denotaremos por K_n al grafo completo de n vértices y lo representaremos por un polígono regular de n vértices con todas sus diagonales.

Ejemplo 5

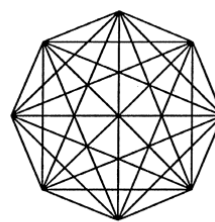
Veamos algunos grafos completos:



K_4



K_5



K_8

3 Grafos Eulerianos

En los casos en que los grafos son utilizados para representar redes de comunicación o de transporte, es importante estudiar la existencia de caminos que recorran todas las aristas o todos los vértices y que, en cierto sentido, sean lo más económicas posibles.